

ОБ ОЦЕНКЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

С.Ф.БАБАЕВА

Бакинский Государственный Университет

seva_babaeva@mail.ru

В работе найдены оценки резольвенты операторных пучков третьего порядка некоторого класса. Далее, эти оценки применены для получения теорем о кратной полноте всех систем собственных и присоединенных векторов или их части. Все результаты даны на языке операторных коэффициентов данного операторного пучка.

В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассмотрим операторный пучок

$$P(\lambda) = \lambda^3 E - A^3 + \sum_{j=0}^2 (A_{3-j} + T_{3-j}) \lambda^j, \quad (1)$$

где $\lambda \in C$ – спектральный параметр, E – единичный оператор в H , операторы A, A_j, T_j ($j = \overline{1,3}$) удовлетворяют условиям:

1) A – положительно-определенный самосопряженный оператор с вполне непрерывным обратным A^{-1} , т.е. $A^{-1} \in \sigma_\infty$;

2) Операторы $B_j = A_j A^{-j}$ ($j = \overline{1,3}$) ограничены в H , т.е. $B_j \in L(H)$;

3) Операторы $K_j = T_j A^{-j} \in \sigma_\infty$ ($j = \overline{1,3}$).

Определение 1. Если при некотором $\lambda \in C$ операторный пучок (1) обратим, т.е. имеет ограниченную обратную, определенную на всем пространстве H , то λ называется регулярной точкой, а $P^{-1}(\lambda)$ – резольвентой пучка (1).

Если при некотором $\lambda_0 \in C$ уравнение $P(\lambda_0)\varphi = 0$ имеет решение $\varphi_0 \neq 0$, то λ_0 называется собственным значением пучка (1), а φ_0 – соответствующим λ_0 -собственным вектором пучка $P(\lambda)$. Если векторы $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m_0}$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{m=0}^s \frac{P^{(m)}(\lambda_0)}{m!} \varphi_{s-m} = 0, \quad s = 0, 1, \dots, m_0,$$

то эти векторы называются собственными и присоединенными векторами пучка $P(\lambda)$, отвечающие λ_0 .

Как известно, при $A_j = 0$ ($j = \overline{1,3}$) пучок (1) есть неограниченная запись пучка М.В.Келдыша [1]. Отметим, что при $A_j = 0$ ($j = \overline{1,3}$) в работе [1] доказана трехкратная полнота систем всех собственных и присоединенных векторов. В работе [3] при этих же условиях, но при выполнении некоторых алгебраических условий, доказана двукратная полнота систем собственных и присоединенных векторов, отвечающих собственным значениям из левой полуплоскости.

В данной работе мы оцениваем резольвенту операторного пучка (1) на некоторых лучах и находим условия на коэффициенты операторного пучка $P(\lambda)$ при $A_j \neq 0$ ($j = \overline{1,3}$), которые обеспечивают трехкратную полноту систем всех собственных и присоединенных векторов и двукратную полноту системы собственных и присоединенных векторов, отвечающих собственным значениям из левой полуплоскости. Отметим, что аналогичные оценки для операторных пучков второго порядка получены в работе [6].

Сперва докажем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1), 2) и имеет место неравенство

$$q = \sum_{j=0}^2 d_{3,j} \|B_{3-j}\| < 1, \quad (2)$$

где $d_{3,0} = 1$, $d_{3,1} = d_{3,2} = \frac{2^{1/3}}{3^{1/2}}$.

Тогда операторный пучок

$$L(\lambda) = \lambda^3 E - A^3 + \sum_{j=0}^2 A_{3-j} \lambda^j \quad (3)$$

обратим на лучах

$$\Gamma_k = \left\{ \lambda: \lambda = r e^{i\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{\pi}{3}\right)}, r > 0 \right\}, \quad k = \overline{0,5},$$

причем на этих лучах имеют место оценки

$$\sum_{j=0}^3 \|\lambda^{3-j} A^j P^{-1}(\lambda)\| \leq \text{const}. \quad (4)$$

Доказательство. Очевидно, что на лучах Γ_k операторный пучок $L_0(\lambda) = \lambda^3 E - A^3 = (\pm r^3 E - A^3)$ обратим. Если обозначим через

$L_1(\lambda) = \sum_{j=0}^3 A_{3-j} \lambda^j$, то $L(\lambda) = L_0(\lambda) + L_1(\lambda)$ и на лучах Γ_k

$$L(\lambda) = (E + L_1(\lambda)L_0^{-1}(\lambda))L_0(\lambda). \quad (5)$$

Так как при $\lambda \in \Gamma_k$

$$\left\| \lambda^j A^{3-j} L_0^{-1}(\lambda) \right\| = \sup_{\mu \in \sigma(A)} \left| r^j \mu^{3-j} (r^6 + \mu^6)^{-1/2} \right| = d_{3,j} \quad (j = \overline{0,2}),$$

то на этих лучах Γ_k

$$\left\| L_1(\lambda) L_0^{-1}(\lambda) \right\| \leq \sum_{j=0}^3 \left\| B_{3-j} \right\| \cdot \left\| \lambda^j A^{3-j} L_0^{-1}(\lambda) \right\| \leq q < 1. \quad (6)$$

Поэтому из (2) и (6) следует, что оператор $L(\lambda)$ обратим на этих лучах. Далее, из (5) и (6) следует, что

$$\sum_{j=0}^2 \left\| \lambda^j A^{3-j} L^{-1}(\lambda) \right\| \leq \sum_{j=0}^2 \left\| \lambda^j A^{3-j} L_0^{-1}(\lambda) \right\| \left\| (E + L_1(\lambda) L_0^{-1}(\lambda))^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1-q} \sum_{j=0}^3 d_{3,j} = const.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы следует

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1) – 3) и имеет место оценка

$$q_1 = \sum_{j=0}^2 d_{3,j} \left\| B_{3-j} + K_{3-j} \right\| < 1.$$

Тогда операторный пучок $P(\lambda)$ обратим на лучах Γ_k ($k = \overline{0,5}$) и имеют место оценки

$$\sum_{j=0}^2 \left\| \lambda^j A^{3-j} P^{-1}(\lambda) \right\| \leq const, \quad \lambda \in \Gamma_k \quad (k = \overline{0,5}).$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1) – 3), $A^{-1} \in \sigma_\rho(H)$ (см. [1-5]) и неравенство (2). Тогда пучок $P(\lambda)$ имеет только дискретный спектр с единственной предельной точкой в бесконечности, резольвента $P^{-1}(\lambda)$ представляется в виде отношения двух целых функций порядка не выше ρ и минимального типа при порядке ρ .

Доказательство. Очевидно, что

$$P(\lambda) = L_0(\lambda) + L_1(\lambda) + T(\lambda),$$

где $L(\lambda) = L_0(\lambda) + L_1(\lambda)$ определен в (3), а $T(\lambda) = \sum_{j=1}^3 T_{3-j} \lambda^j$. При $\lambda \in \Gamma_k$

$$\left\| L_1(\lambda) L_0^{-1}(\lambda) \right\| < q < 1$$

и по лемме Келдыша [1]

$$\left\| T(\lambda) L_0^{-1}(\lambda) \right\| \leq \sum_{j=0}^2 \left\| K_{3-j} \lambda^j A^{3-j} L_0^{-1}(\lambda) \right\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty.$$

Поэтому при достаточно больших $\lambda \in \Gamma_k$ из равенства

$$P(\lambda) = (E + L_1(\lambda) L_0^{-1}(\lambda) + T(\lambda) L_0^{-1}(\lambda)) L_0(\lambda)$$

следует, что $P^{-1}(\lambda)$ существует. С другой стороны, из условия (2) следует, что $E - B_3$ обратим в H и поэтому $P(\lambda)$ можно представить в виде

$$P(\lambda) = (E - B_3)(E + Q(\lambda))A^3, \quad (7)$$

где $Q(\lambda) = \sum_{j=0}^3 Q_j \lambda^j$, $Q_0 = (B_3 - E)^{-1} K_0 \in \sigma_\infty$, $Q_1 = (B_3 - E)^{-1} (B_1 + K_1) A^{-1} \in \sigma_\rho$,

$$Q_2 = (B_3 - E)^{-1} (B_2 + K_2) A^{-2} \in \sigma_{\rho/2}, \quad Q_3 = (B_3 - E)^{-1} A^{-3} \in \sigma_{\rho/3}.$$

Тогда $E + Q(\lambda)$ имеет только дискретный спектр с предельной точкой в бесконечности и $(E + Q(\lambda))^{-1}$ представим в виде отношения двух целых функций порядка ρ и минимального типа при порядке ρ [1,2]. Из (7) следует, что это свойство относится и $P^{-1}(\lambda)$. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть выполнены условия 1) – 3) и неравенство (2). Тогда при выполнении одного из следующих условий

а) $A^{-1} \in \sigma_\rho$ ($0 < \rho \leq 3$);

б) $A^{-1} \in \sigma_\rho$ ($0 < \rho < \infty$), $B_j \in \sigma_\infty$ ($j = \overline{1,3}$)

система всех собственных и присоединенных векторов трехкратно полна в H .

Доказательство. В силу [1,5] надо доказать, что из голоморфности вектор-функции $g(\lambda) = (P^{-1}(\lambda))^*(f_0 + \lambda f_1 + \lambda^2 f_2)$ следует $f_0 = f_1 = f_2 = 0$. Так как на лучах $\lambda \in \Gamma_k$ ($k = \overline{0,5}$) имеет место неравенство (4) и угол между соседними лучами Γ_k равен $\frac{\pi}{3}$, то в случае а) по теореме Фрагмена-Линделефа получаем, что $g(\lambda) = 0$. Отсюда следует, что $f_0 = f_1 = f_2 = 0$. В случае б) утверждение теоремы следует из теоремы М.В.Келдыша [1].

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 4 и $T_j = 0$ ($j = \overline{1,3}$). Тогда система собственных и присоединенных векторов $P(\lambda)$, отвечающих собственным значениям из левой полуплоскости, двукратно полна в H .

Доказательство. Так как имеет место неравенство (2), то из результатов работы [3] следует, что задача $P(d/dt)u(t) = 0$, $u(0) = \varphi_0$, $u'(0) = \varphi_1$ имеет регулярное решение при любом $\varphi_j \in D(A^{3-j/2})$, $j = 0,1$, а из оценки (4) на лучах Γ_k следует, что резольвента $P^{-1}(\lambda) \in K_{\rho,0}$ [5]. Тогда система собственных и присоединенных векторов пучка $P(\lambda)$, отвечающих собственным значениям из левой полуплоскости, двукратно полна в H (см. также [5-9]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН, 1971, т.26, № 4, с. 15-41.

2. Аллахвердиев Дж.Э. Оценка резольвенты и теорема полноты для операторов, зависящих от спектрального параметра // Изв. АН. Аз. ССР, сер. физ.-тех. и математ. наук, 1974, № 6, с. 3-36.
3. Мирзоев С.С. О кратной полноте корневых векторов полиномиальных операторных пучков, отвечающих крайвым задачам на полуоси // Функц. анализ и его приложения, 1983, т. 17, в. 2, с. 84-85.
4. Радзиевский Г.В. Задача о полноте корневых векторов в спектральной теории операторных функций // УМН, 1982, т.37, № 2 (224), с. 81-145.
5. Гасымов М.Г. К теории полиномиальных операторных пучков // ДАН СССР, 1971, т.199, № 4, с. 747-750.
6. Мирзоев С.С., Гулиева Ф.А. О полноте элементарных решений одного класса дифференциальных уравнений второго порядка с операторными коэффициентами // Математические заметки, 2009, т.86, №5, с.797-800.
7. Мирзоев С.С., Гумбаталиев Р.З. О полноте системы элементарных решений одного класса операторно-дифференциальных уравнений на конечном отрезке // Доклады РАН, 2010, т. 431, № 4, с. 454-456.
8. Мирзоев С.С., Велиев С.Г. О решении одного класса операторно-дифференциальных уравнений второго порядка в классе голоморфных вектор-функций // Украинский матем. журнал, 2010, т.62, № 6, с.801-813.
9. Мирзоев С.С., Салимов М.Ю. О полноте элементарных решений одного класса операторно-дифференциальных уравнений второго порядка // Сибирский матем. журнал, 2010, т. 5. № 4, с.815- 828.

BİR SINIF ÜÇÜNCÜ TƏRTİB OPERATOR DƏSTƏSİNİN REZOLVENTİNİN QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ VƏ ONUN TƏTBİQLƏRİ

S.F.BABAYEVA

XÜLASƏ

Məqalədə bir sinif üçüncü tərtib operator dəstəsinin rezolveni üçün qiymətləndirilmələr tapılmışdır. Daha sonra bu qiymətləndirmələr məxsusi və qoşma vektorlar sistemi və yaxud onların müəyyən bir hissəsi üçün tamlıq teoremlərinin alınmasında tətbiq edilmişdir. Bütün nəticələr verilmiş operator dəstəsinin operator əmsallarının iştirakı ilə alınmışdır.

ON THE ESTIMATION OF THE RESOLVENT OF ONE CLASS OPERATOR PENCILS OF THE THIRD ORDER AND ITS APPLICATIONS

S.F.BABAYEVA

SUMMARY

In this article, estimations of the resolvent of the operator pencil of the third order of some class are discovered. Further, these estimations are applied to deriving theorems of multiple completeness of the systems of characteristic and joined vectors or their part. All the consequences are presented by operator factors of the given operator pencil.